

I - **ETUDE ET REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION.**

1) **Déterminer le domaine de définition puis calculer les limites aux bornes de D_f :**

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{|x| + 2}$. b) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 8x + 16}$. c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{|x| - 1}$. f) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 5x + 4}$.

2) **Etudier la dérivabilité de f au point x_0 puis donner l'interprétation géométrique :**

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{|x| + 1}$; $x_0 = 0$. b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $x_0 = -1$ à droite et $x_1 = 1$ à gauche .

c) $\begin{cases} f(x) = \frac{1 - x}{x} ; & x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 3x + 2 ; & x \leq 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$. d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{|x| + 1}$; $x_0 = -1$.

3) **Etudier les variations de f sur son domaine puis donner le tableau de variations :**

a) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}$. b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3 + 3x} & ; x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x - 1} & ; x \leq 0 \end{cases}$.

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$. d) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2 - x} & (x \leq 2) \\ x - 1 - \frac{2}{x} & (x \geq 2) \end{cases}$.

4) **Etudier la concavité de f puis tracer la courbe dans un repère orthonormé :**

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$. b) $f(x) = x\sqrt{x}$.

c) $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2 - x} & (x < 2) \\ x - 1 - \frac{2}{x} & (x \geq 2) \end{cases}$. d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$.

5) **Etude et représentation d'une fonction :**

A) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 15}$

1) Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes .

2) Etudier les branches infinies et asymptotes .

3) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe .

4) Donner le tableau de variations de f sur son domaine .

5) On pose : $P(x) = x^2 + 16x + 55$ et $Q(x) = x^2 + 14x + 33$.

A) Résoudre les équations : $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$ puis les factoriser .

B) Montrer que le point $I(-3, 1)$ est centre de symétrie de la courbe .

6) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

=====

B) On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} - 2x + 2 & (x \leq 0) \\ x^3 - x^2 - x + 2 & (x \geq 0) \end{cases} .$$

1) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$, puis donner l'interprétation géométrique .

3) Calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$ puis étudier son signe . .

4) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$, puis en déduire qu'elle est décroissante .

5) Donner le tableau de variation de f sur son domaine .

6) a) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote d'équation $y = -3x + \frac{5}{2}$ au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que la courbe (C_f) admet une direction asymptotique au voisinage de $+\infty$.

7) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion pour $x \geq 0$ à déterminer puis en déduire sa concavité

8) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

=====

C) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

1) Déterminer D_f puis calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) Déterminer l'équation de l'autre asymptote au voisinage de $-\infty$.

3) Calculer $f'(x)$, étudier son signe sur chacun des intervalles : $] -\infty, -\frac{3}{2}]$; $[-\frac{3}{2}, +\infty[$

4) Dresser le tableau de variations .

5) Etudier la concavité de (C_f)

6) Tracer la courbe .

II – Suites numériques ; arithmétiques et géométriques :

1) Exercice.1

1) On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

a) Montrer que (u_n) est positive et majorée par le nombre 1

b) Montrer que (u_n) est croissante .

c) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique .

d) Ecrire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

e) Ecrire en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i$.

2) Exercice.2

On considère les suites (u_n) ; (v_n) et (w_n) définies par :

$$u_1 = 1 ; u_0 = 0 ; u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n ; W_n = 3^n \cdot u_n ; v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

1) Calculer u_2 ; v_0 ; w_0 .

2) Montrer que (V_n) est une suite géométrique .

3) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique .

4) Exprimer v_n et w_n en fonction de n .

5) Calculer en fonction de n : $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n} w_i$ et $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i$.

3) Exercice .3

Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années Quel est l'âge de chacune des personnes ?

4) Exercice .4

Trois nombres réels a, b, c strictement positifs forment dans cet ordre une suite géométrique croissante et tels que

$$a + b + c = \frac{26}{3} \text{ et } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{13}{6} . \quad \text{Déterminer } a \text{ et } b \text{ et } c .$$

III – Produit scalaire .

Exercice .1

1) Soit (D) la droite d'équation $3x - 4y + 7 = 0$ et $A(2 ; -3)$; $B(3 ; 4)$ deux points du plan .

Calculer la distance de A et B à (D) .

2) On considère les points : $E(-1,2)$, $F(-2,1)$, $C(2,-1)$.

a) Calculer $\|EF\|$ et $\|EC\|$ puis $\cos(\widehat{EF;EC})$. Qu'est ce qu'on en déduit . ?

b) Déterminer l'équation de la droite (Δ) qui passe par E et perpendiculaire à la droite (EF).

c) Calculer la distance EI sachant que I est le milieu du segment $[FC]$.

d) Calculer la distance de F à la droite (Δ) .

Exercice .2

Le plan est rapporté au repère orthonormé . On considère les points : $A(2,0)$; $B(0,2)$; $C(3,1)$

1) Déterminer l'équation du cercle (C) passant par B et de centre A .

2) Déterminer l'équation de la droite (Δ) qui passe par C et perpendiculaire à (AB) .

3) Calculer $d(A,(\Delta))$. Qu'est ce qu'on en déduit ? .

4) On pose : (D_m) : $x + my - 3 = 0$. Montrer que la droite ne peut être tangente au cercle (C) quelque Soit la valeur de m .

5) Est-ce que les droites (Δ) et (D_1) sont perpendiculaires ?

6) Montrer que le point $E(-2,0)$ est à l'extérieur du cercle (C) puis déterminer les équations des tangentes à (C) et passants par E .

7) Calculer la surface du triangle ABC .

8) Résoudre graphiquement le système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0 \\ -x + y + 2 \geq 0 \end{cases} .$$

Exercice .3

Soit (C) le Cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

1) Déterminer le centre et le rayon .

2) Soit $A(0,-4)$ un point du plan . Montrer que A est à l'extérieur du cercle (C).

3) Soit (D) la droite qui passe par A et tangente au cercle au point T .

Calculer les coordonnées de T puis déterminer l'équation cartésienne de (D) .

4) Soit $B(-3,1)$ un point du plan . Calculer la distance de Ω centre du cercle à la droite (AB).

5) On considère les points $C(1,-4)$ et $D(2,-4)$ du plan .

a) Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{\Omega C}$. Qu'est ce qu'on en déduit ?

b) Calculer $\|AD\|$; déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AD]$ puis en déduire que le triangle ΩDA est isocèle de sommet Ω .

c) Déterminer l'équation de la hauteur du triangle ΩDA passant par Ω .